Amérique du sud 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 5 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.
Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.

L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016 + n$. On a donc $v_0 = 12$.

1) Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.

2) Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x.$$

a) Justifier que g est croissante sur $[0\ ;\ 60]$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

2) On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.

c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

d) En déduire la convergence de la suite (u_n).

e) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3) Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle. Il utilise l'algorithme suivant.

Variables	n un entier naturel u un nombre réel

Traitement	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 12
	Tant Que ....
	    u prend la valeur ....
	    n prend la valeur ....
	Fin Tant Que

Sortie	Afficher ....

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geqslant 50$.

Amérique du sud 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 5 : corrigé

Partie A : un premier modèle

1) Soit n un entier naturel. $v_{n+1} = v_n + \dfrac{5}{100}v_n = 1,05v_n$.

Donc, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 12$ et de raison $q = 1,05$. On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$v_n = v_0 \times q^n = 12 \times (1,05)^n.$$

2) Puisque $1,05 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 12 \times (1,05)^n = +\infty$. La population dépassera donc strictement les 60 000 individus à partir d'une certaine année. Le modèle ne répond pas aux contraintes du milieu naturel.

Partie B : un second modèle

1) a) La fonction g est dérivable sur $[0;60]$ et pour $x \in [0;60]$, $g'(x) = -\dfrac{2,2}{605}x + 1,1$. Ensuite

$$x \leqslant 60 \Rightarrow -\frac{2,2}{605}x + 1,1 \geqslant -\frac{2,2}{605}60 + 1,1 \Rightarrow g'(x) \geqslant 0,88\ldots \Rightarrow g'(x) \geqslant 0.$$

Donc, la fonction g est croissante sur $[0;60]$.

b) Soit x un réel.

$$\begin{aligned} g(x) = x &\Leftrightarrow -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x = x \Leftrightarrow -\frac{1,1}{605}x^2 + 0,1x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1,1}{605}x + 0,1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{0,1 \times 605}{1,1} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{605}{11} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 55. \end{aligned}$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $g(x) = x$ sont 0 et 55. On note de plus que les deux nombres précédents appartiennent à l'intervalle $[0;60]$.

2) a) $u_1 = -\dfrac{1,1}{605} \times 12^2 + 1,1 \times 12 = 12,938$ arrondi à 10^{-3}. En 2017, la population est de 12 938 individus.

b) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.

- $u_0 = 12$ et donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 55$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 55$. Alors, puisque u_n et 55 appartiennent à $[0;60]$ et que la fonction g est croissante sur $[0;60]$, on en déduit que $g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(55)$ et donc que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 55$ (puisque $g(0) = 0$ et $g(55) = 55$ d'après la question 1)b)).

On a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 55$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n = u_n\left(-\frac{1,1}{605}u_n + 0,1\right) = \frac{1,1}{605}u_n\left(-u_n + 0,1 \times \frac{605}{1,1}\right) = \frac{1,1}{605}u_n(55 - u_n).$$

Puisque $u_n \in [0;55]$, cette dernière expression est positive. On a montré que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 55). Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.

e) Puisque $g(\ell) = \ell$, on a nécessairement $\ell = 0$ ou $\ell = 55$. D'autre part, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et donc $\ell \geqslant u_0$ ou encore $\ell \geqslant 12$. Finalement, $\ell = 55$. A long terme, la population se stabilisera à environ 55 000 individus.

3) Algorithme complété.

Variables	n un entier naturel u un nombre réel

Traitement	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 12
	Tant Que $u < 50$
	    u prend la valeur $-\dfrac{1,1}{605} \times u^2 + 1,1 \times u$
	    n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant Que

Sortie	Afficher n

On note que la valeur de n quand l'algorithme s'arrête, est 1 de plus que la dernière valeur de p pour laquelle $u_p < 50$ ou encore n est la première valeur de p pour laquelle $u_p \geqslant 50$. n est donc l'entier r et on doit afficher n (et pas $n + 1$ ou $n - 1$).

